УДК 532.551, 532.542, 534.2, 534.012

К АППРОКСИМАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ОДНОМЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЙ В КРУГЛЫХ КАНАЛАХ

Д.И. Зарипов
zaripov.d.i@mail.ru

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Казанский научный центр Российской академии наук

Ключевые слова: граничные условия, круглый канал, длинный канал, опорожнение трубы, акустические колебания, моделирование.

Аннотация

В рамках одномерной модели течения сплошной среды в круглых длинных каналах рассмотрено граничное условие на открытом торце, учитывающее нелинейные процессы, протекающие при втекании (вытекании) в канал, и предложена оригинальная процедура его численной реализации. Рассмотрена задача об опорожнении трубы закрытой с одной стороны и открытой – с другой. Показано, что использование предложенной процедуры численной реализации граничного условия хорошо описывают процессы, протекающие на открытой границе, в совокупности с достоверным определением скорости распространения возмущений и значения статического давления в полости канала.

Введение

В настоящее время математическое моделирование наряду с физическими экспериментами играет важную роль при проектировании сложных технических систем. Однако, несмотря на привлекательность применения математического моделирования, такой подход ограничен вычислительными ресурсами ЭВМ. Поэтому при моделировании часто прибегают к допущениям, результатом которых является упрощенная математическая модель, позволяющая решить исходную физическую задачу, но с меньшими вычислительными затратами. Наиболее разумным упрощением при моделировании течений в длинных круглых каналах являются переход к одномерной модели [1-3]. Не менее важным при моделировании нестационарного течения газа или жидкости является корректная постановка граничных условий, удовлетворяющих физической постановке задачи. Впервые граничное условие на открытой границе трубы рассмотрено Рэлеем [4] при исследовании задачи о продольных колебаниях газа в трубе с закрытой твердой стенкой с одной стороны и открытой – с другой. В данной работе задача сведена к решению уравнения Гельмгольца с граничным условием для давления $p=Const$. Такое условие приводит к бесконечному значению амплитуды при резонансных режимах колебаний, поэтому им же предложено увеличить длину канала L на концевую поправку σR (для открытого торца трубы с фланцем $\sigma=0,61$), учитывающую акустическое излучение массы и энергии во внешнее пространство.

В работе [1] можно встретить граничное условие на входной (выходной) границе трубы, представленное в виде гармонических колебаний скорости с постоянной амплитудой: $u=u_0+A_u sin(\omega t)$, где u_0 – средняя по времени среднерасходная скорость течения, A_u – среднерасходная амплитуда колебания скорости, ω – круговая частота колебания. В выражении принято допущение о постоянстве (по времени) амплитуды пульсаций на входе. Такое представление позволяет описать стоячую волну, в смысле однократного наложения падающей волны с отраженной, но не способно описать установившуюся резонансную стоячую волну, когда режим установления колебаний газа возникает при многократном отражении начальных возмущений.

К сожалению, предложенные в работах [1, 4] граничные условия не описывают реальную нелинейную картину течения на открытой границе трубы. В работах [5, 6, 7] показано, что движение газа вблизи открытой границы можно рассматривать как череду циклов формирования струи на выдуве, отделения струи от трубы, формирования вихря и втекания газа в полость. Т.е. отмечается существенное отличие процессов втекания и вытекания газа: при вытекании образуется струя с малым телесным углом, а втекание газа осуществляется со всего окружающего пространства. Такое течение характерно для пульсирующих течений. Детально вопрос о постановке граничных условий для дозвуковых потоков рассмотрен в работах [2, 8, 9], в которых используется равенство статического (при истечении) или полного (при втекании) давления давлению в окружающем пространстве. Авторы работы [2] предлагают учитывать данное обстоятельство с помощью слагаемого, учитывающего потерю полного давления во входном сечении на скоростной напор:

$$p = p_g - \zeta \frac{\rho u|u|}{2}, \tag{1}$$

где p, u – статическое давление и скорость во входном сечении, соответственно, p_g – давление во внешней среде, ζ – коэффициент сопротивления, зависящий от вида входного участка [10]. Введение коэффициента сопротивления ζ целесообразно при учете влияния отрывных эффектов. Во многих задачах, например, опорожнения трубы, пренебрежение этим коэффициентом приводит к физически неверному результату. Однако, например, при свободном истечении из канала, давление на срезе с достаточной точностью соответствует давлению в окружающей среде. В этом случае в выражении (1) для давления в выходном сечении, положив $\zeta=0$, следует отбросить квадратичный член. А при стационарном безотрывном втекании газа в трубу можно положить $\zeta=1$ [10].

При численной реализации граничного условия (1) возникают трудности определения давления на верхнем временном слое, поскольку требуется определение скорости потока в том же сечении в тот же момент времени. В работе [2] предложена процедура численной реализации граничного условия (1), основанная на решении задачи о распаде разрыва между окружающим пространством и областью внутри трубы. Недостатком этой процедуры является применение итерационных алгоритмов определения параметров рабочего тела на открытой границе, что затрудняет применение конечно-разностных схем интегрирования, основанных на сквозном счете. Поэтому задача разработки процедуры реализации граничного условия на открытой границе канала, позволяющая получить параметры потока на срезе трубы без применения итерационных алгоритмов остается открытой и требует отдельного исследования.

Математическая модель и аппроксимация граничного условия на открытой границе

Рассмотрим классическую задачу об осциллирующем движении газа в трубе с закрытым концом с одной стороны и с открытым – с другой (рис. 1).

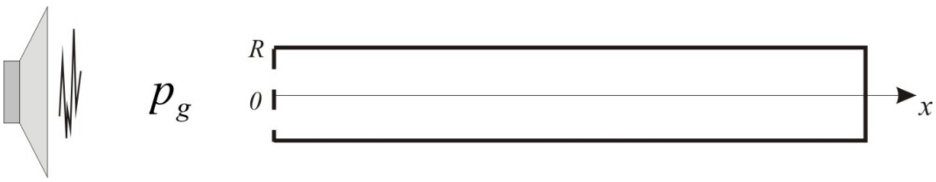

Рис. 1. Схема колебательной установки: - - - – мембрана

Пусть во внешней среде известен закон изменения давления в виде

$$p_g = p_0 + g(t) \tag{2}$$

где p_0 – постоянная составляющая давления в невозмущенной внешней среде; $g(t)$ – периодическая составляющая давления в окружающей среде, которая, в общем случае, является суммой гармонических функций. Предположим, что источник колебаний находится близко к открытому сечению канала так, что движение газа на входе в канал происходит изоэнтропически и одновременно с изменением давления в окружающем пространстве. Тогда давление, определяемое выражением (2), является полным давлением во входном сечении при втекании газа в канал, а статическое давление определяется вычитанием из него динамической составляющей (1) в соответствии с уравнением Бернулли.

Из гипотезы адиабатического и изоэнтропического течения на входе для температуры в окружающей среде можно записать $T = T_0\left(p/p_0\right)^{(k-1)/k}$, где p – статическое давление, определяемое выражением (1), T_0, p_0 – температура и давление во входном сечении в начальный момент времени, соответственно.

В рамках поставленной задачи рассматриваются адаптированные уравнения Навье-Стокса, неразрывности, энергии и состояния, описывающие течение в круглых каналах [3, 12]:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = D, \qquad e = \frac{p}{(k-1)\rho}, \tag{3}$$

где $R = \left\{\rho, \rho u, \rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right)\right\}^T, \qquad Q = \left\{\rho u, \left(p + \rho u^2\right), \rho u\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)\right\}^T,$

$D = \left\{0, -\frac{2}{R}\tau_w, 0\right\}^T$, τ_w – напряжение трения на стенке, τ – время, x – продольная координата, ρ – плотность, p – давление, u – скорость, e – удельная внутренняя энергия, h – удельная энтальпия, k – коэффициент адиабаты, R – радиус.

На твердой непроницаемой границе выполняется условие непротекания, которое моделируется, рассматривая виртуальный узел численной сетки, в котором параметры газа, за исключением скорости, соответствуют параметрам соседней внутренней точки, а скорость противоположна по знаку [13].

Рассмотрим подробнее граничное условие (1) на открытой границе. Запишем уравнения сохранения массы и импульса в допущении об акустических колебаниях газа. Тогда, следуя методу линеаризации [14], можно записать:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2}{\mathrm{R}}\frac{\tau_w}{\rho_0}. \tag{5}$$

Построим равномерную сетку по пространству с шагом Δx и по времени с шагом Δt (рис. 2).

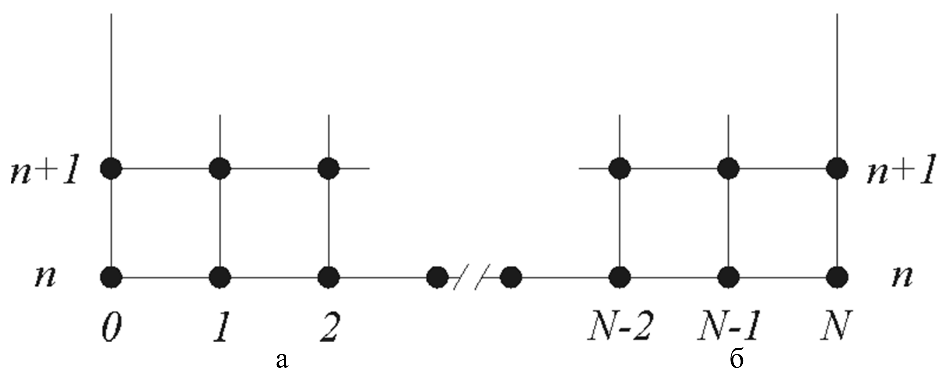

Рис. 2. Схемы для открытых границ: (а) левая граница открыта; (б) правая граница открыта

Пусть, для определенности, левая граница проницаема, т.е. открыта и сообщается с окружающим пространством. Запишем разностную схему для уравнения (5) для левой границы (рис. 2, а) в неявном виде и выразим u_0^{n+1}:

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{\rho_0}\left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1}\right) - \frac{2\Delta t}{R}\frac{\tau_{w_0}^{n+1}}{\rho_0} \tag{6}$$

В выражении (6) неизвестными являются u_0^{n+1}, p_0^{n+1}, p_1^{n+1} и $\tau_{w_0}^{n+1}$, а скорость u_0^n известна из нижнего временного слоя.

Напряжение трения в первом приближении можно выразить через скоростной напор $\tau_w = \xi\rho u^2/8$ с использованием коэффициента сопротивления трения ξ. Воспользовавшись квазистационарным приближением для ламинарного трубного течения, т.е. $\xi = 64/\mathrm{Re}$, где $\mathrm{Re} = 2\rho_0 uR/\mu$ - число Рейнольдса вычисленное по диаметру канала, выражение (6) примет вид

$$\left(1 + \frac{8\Delta t\mu}{\rho_0 R^2}\right)u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{\rho_0}\left(p_1^{n+1} - p_0^{n+1}\right) \tag{7}$$

Для определения p_0^{n+1} воспользуемся условием (1):

$$p_0^{n+1} = p_g^{n+1} - \zeta\frac{\rho_0\, u_0^{n+1}\left|u_0^{n+1}\right|}{2}. \tag{8}$$

Для определения статического давления в ближайшем к входу внутреннем узле p_1^{n+1} можно воспользоваться решением системы (3) во внутренних узлах сетки или уравнением (4). В последнем случае для узла *(1,n+1)* запишем конечно-разностное уравнение

$$\frac{p_1^{n+1} - p_1^n}{\Delta t} + \rho_0 c_0^2\frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} = 0. \tag{9}$$

Выражая p_1^{n+1} из (9) и учитывая (8), приведем выражение (7) к квадратному уравнению для определения скорости во входном сечении на верхнем временном слое:

$$Au_0^{n+1}\left|u_0^{n+1}\right| + Bu_0^{n+1} - C = 0, \tag{10}$$

где $C = u_0^n + \nu\left(p_g^{n+1} - p_1^n\right)/\rho_0 c_0 + \nu^2\left(u_1^n - u_0^n\right)$, $B = 1 + 8\Delta t \mu / \rho_0 R^2$, $A = (\zeta \Delta t)/(2\Delta x)$, $\nu = \Delta t c_0 / \Delta x$ – число Куранта.

Уравнение (10) имеет два физически допустимых решения:

$$u_0^{n+1} = \frac{\mp B \pm \sqrt{B^2 \pm 4AC}}{2A}, \tag{11}$$

где верхние знаки соответствуют втеканию, нижние – истечению.

Следует отметить, что при отсутствии трения *B=1* и при числе Куранта *ν=1* выражение (11) принимает вид

$$u_0^{n+1} = c_0\left(\mp 1 \pm \sqrt{D}\right)/\zeta\ , \tag{12}$$

где $D = 1 \mp 2\zeta\left(p_g^{n+1} - p_1^n\right)/\rho_0 c_0^2$. Выражение (12) согласуется с результатами, приведенными в работе [2]. Однако видно, что выражение (11) пригодно для произвольного числа Куранта и учитывает трение во входном сечении.

В случае открытой правой границы (рис. 2, б) все вышеизложенные рассуждения остаются в силе, за исключением индексации и направления течения при втекании и истечении. Опуская аналогичные преобразования, давление на правой границе определяется выражением

$$p_N^{n+1} = p_g^{n+1} + \zeta\,\frac{\rho_0\, u_N^{n+1}\left|u_N^{n+1}\right|}{2}. \tag{13}$$

Соответственно, скорость u_N^{n+1} определяется выражением (11) в котором $C = u_N^n - \nu\left(p_g^{n+1} - p_{N-1}^n\right)/\rho_0 c_0 - \nu^2\left(u_N^n - u_{N-1}^n\right)$, $B = 1 + 8\Delta t \mu / \rho_0 R^2$, $A = (\zeta \Delta t)/(2\Delta x)$.

Итак, скорость и статическое давление на входной (выходной) границе можно определить с использованием выражений (8), (11) и (13).

В начальный момент времени принимаются постоянные значения давления *p* и плотности *ρ* потока по длине каналов, а также нулевая скорость потока *u=0.* Численное интегрирование уравнений (3) выполнялось с использованием явной конечно-разностной схемы Лакса-Вендроффа [15], согласно которой сначала рассчитываются значения сеточной функции в полуцелых точках шаблона на промежуточном слое $(t_{n+1/2},\ x_{i+1/2})$. На втором этапе вычисляется решение на верхнем слое в точке $(t_{n+1},\ x_i)$. Расчет повторяется на новом шаге по времени вплоть до установления решения. Схема устойчива при выполнении условия Куранта $\Delta t < \Delta x \nu / \left(c_0 + |u|\right)$, где 0<ν<1 – число Куранта, c_0 – скорость звука, *u* – скорость потока.

Результат решения задачи о распаде разрыва

Для тестирования предложенной процедуры реализации граничных условий, рассматривалась задача об опорожнении цилиндрической трубы длиной 2м, заполненной воздухом с давлением $1{,}6\cdot10^5$Па и плотностью 2,08кг/м^3. Правая граница принимается заглушенной, а левая – сообщается с окружающей средой с давлением 10^5Па и плотностью 1,3кг/м^3. Решение проводилось при Δx=0,04м и Δt=$6\cdot10^{-5}$с. Параметр ζ принимал значения 1,5 при втекании, 0,5 - при истечении. Перед численным интегрированием уравнений (3) проводился тест Сода [15], представляющий собой задачу о распаде произвольного разрыва, с использованием конечно-разностных схем Лакса-Вендроффа. Тест показал хорошее совпадение с результатами того же автора.

На рис. 3 представлено изменение статического давления на непроницаемой стенке, отнесенное к давлению в окружающей среде, на интервале времени 0-0,1с. На представленном графике можно видеть периодическое затухающие колебания статического давления в полости трубы во времени. Такое решение является следствием учета в граничном условии потерь энергии на величину доли скоростного напора при вытекании и втекании. Небольшое отклонение расчетных значений статического давления от экспериментальных данных на режимах максимальных скоростей истечения или втекания (на горизонтальных участках графиков) является результатом линеаризации уравнений (3) при аппроксимации граничных условий.

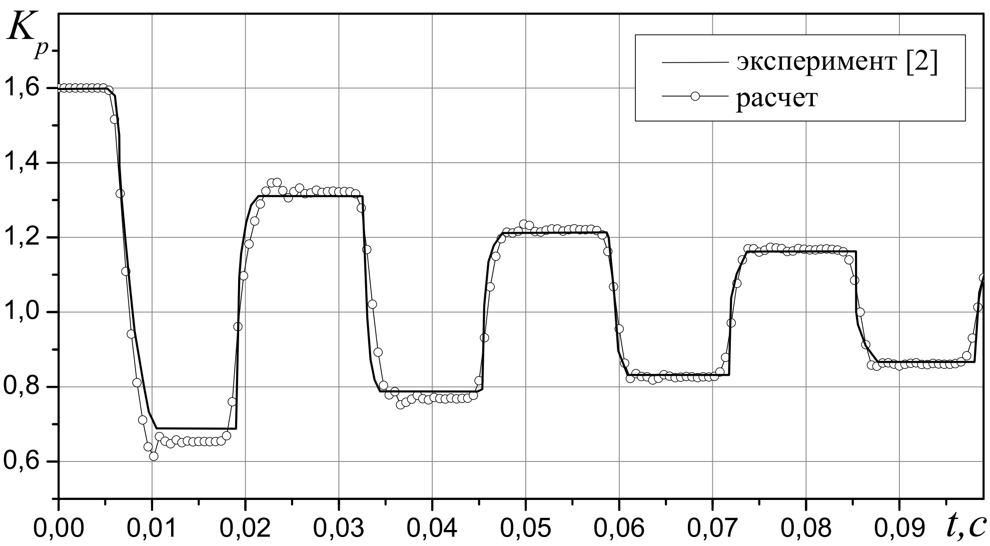

Рис. 3. Статическое давление на стенке канала

Хорошо прогнозируется и скорость распространения возмущений, в то время как в работе [2] использование аналогичных линеаризованных уравнений (12) приводит к занижению ее значения. Нефизичные осцилляции на фронте волны (рис. 3) являются следствием дисперсионных свойств численной схемы Лакса-Вендроффа, использующей второй порядок аппроксимации производных, входящих в уравнения (3).

Заключение

Таким образом, предложенные в данной работе граничные условия (8), (11) и (13) для определения статического давления и скорости на входной (выходной) границе круглого канала хорошо описывают процессы, протекающие на открытой границе, в совокупности с достоверным определением скорости распространения возмущений и значения статического давления в полости канала.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке ФАНО (проект №0217-2014-0001) и грантов РФФИ (13-08-00359, 14-01-31067).

Поступила 31.01.2015г.

Литература

1. Валуева, Е.П. Теплообмен при турбулентном течении газа в трубе в условиях резонансных колебаний расхода / Е.П. Валуева // Теплофизика высоких температур. – 2002. – Т. 40. – №3. – С. 442-448.
2. Борисенко, В.И. Численное моделирование газодинамических процессов в открытой с торца трубе / В.И. Борисенко, М.А. Кутищев, В.П. Мукоид // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40. – №1. – С. 74-79.
3. Зарипов, Д.И. Метод моделирования течения жидкости в разветвленных каналах / Д.И. Зарипов, Н.И. Михеев, Н.С. Душин // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2013. – №1. – С. 23-27.
4. Рэлей, Дж. Теория звука / Дж. Рэлей. – Т.2. – М.: Гостехиздат, 1955. – 476 с.
5. Ilgamov, M.A. Nonlinear oscillations of a gas in a tube / M.A. Ilgamov, R.G. Zaripov, R.R. Galiullin, V.B. Repin // Appl. Mech. Rev. – 1996. – Vol. 49. – №3. – P. 137-154.
6. Галиуллин, Р.Г. Теория резонансных колебаний пульсирующих течений / Р.Г. Галиуллин, М.Г. Кузнецов, О.В. Козулина, А.Н. Николаев, Ю.Ф. Коротков // Вестник казанского технологического университета. – 2012. – №2. – С. 67-69.
7. Зарипов, Р.Г. Нелинейные колебания газа в окрестности открытого торца трубы / Р.Г. Зарипов, Р.И. Давыдов, Н.В. Сонин // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2001. – №3. – С. 1-4.
8. Галиуллин, Р.Г. Теория резонансных колебаний пульсирующих течений / Р.Г. Галиуллин, М.Г. Кузнецов, О.В. Козулина, А.Н. Николаев, Ю.Ф. Коротков // Вестник казанского технологического университета. – 2012. – №2. – С. 67-69.
9. Галиуллин, Р.Г. Нелинейные колебания газа в полуоткрытой трубе / Р.Г. Галиуллин, И.П. Ревва, Г.Г. Халимов // Акустический журнал. – 1982. – Т. 28. – Вып.5. – С. 67-69.

10. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
11. Levy, M.J. Gas flow in a rarefaction wavetube / M.J. Levy, J.H. Potter // Naval Eng. J. – 1964. – №9. – P. 941-950.
12. Зарипов, Д.И. Амплитудно-частотные характеристики акустических колебаний в Т-образных каналах / Д.И. Зарипов, Н.И. Михеев // Теплофизика и аэромеханика. – 2014. – Т. 21. – № 5. – С. 629-636.
13. Годунов, С. К. Численное решение уравнений газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г.П. Прокопов. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
14. Гликман, Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем / Б.Ф. Гликман. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
15. Sod, G.A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Conservation Laws / G.A. Sod // Journal of computational physics. – 1978. – №27. – P. 1-31.

D.I. Zaripov

TOWARDS APPROXIMATION OF BOUNDARY CONDITIONS FOR ONE-DIMENSIONAL FLOW MODELLING IN CIRCULAR PIPES // Transactions of Academenergo. -2015. -N 1. –P. 25-33.

e-mail: zaripov.d.i@mail.ru
Russian Academy of Sciences

Keywords: boundary conditions, circular pipe, long pipe, pipe discharging, acoustic oscillations, modelling.

Abstract
The boundary condition at the open end, taking into account nonlinear processes occurring at inflow (outflow) in the channel, is considered as a part of one-dimensional flow model of continuous medium in long circular pipes. An original procedure of its numerical implementation is offered. The problem of discharging of a pipe closed at one end and open at other end is considered. It is shown that the use of the offered procedure of numerical implementation of boundary condition describes well the processes occurring at the open boundary. Besides, the procedure allows reliable determination of the velocity of disturbances propagation and the values of the static pressure in the channel cavity.