ОТЧЕТ ПО ПРОЕКТУ 18-41-160007
«Мультимодальный подход для описания вязкоупругих свойств растворов и расплавов полимеров при неизотермических течениях»

Руководитель проекта: д.т.н. Вачагина Е.К.

Математические модели

Рассмотрено ламинарное стационарное течение вязкоупругой несжимаемой жидкости в круглых трубах и плоских каналах при различных значениях чисел Вайсенберга We. Полагается, что вектор скорости имеет единственную осевую компоненту скорости V_z, которая является функцией единственной переменной r цилиндрической системы координат (x – декартовой системы координат) с осью z, направленной вдоль оси канала. При сделанных предположениях система уравнений переноса количества движения и неразрывности в выбранной системе координат может быть записана в виде

(а) в круглой трубе

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{d\left(r\sigma_{rz}\right)}{dr}=0,\qquad -\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{d\left(r\sigma_{rr}\right)}{dr}-\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}=0,\tag{1.1а}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \varphi}=0,\qquad \frac{dV_z}{dz}=0\tag{1.2а}$$

$$\rho_f C_{pf} V_z\left(r\right)\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)\tag{1.3а}$$

(б) в плоском канале

$$-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{d\left(\sigma_{xz}\right)}{dx}=0,\qquad -\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{d\left(\sigma_{xx}\right)}{dx}=0,\tag{1.1б}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y}=0,\qquad \frac{dV_z}{dz}=0\tag{1.2б}$$

$$\rho_f C_{pf} V_z\left(x\right)\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{d^2T}{dx^2}\tag{1.3б}$$

где P - давление; σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rz} (σ_{xz},σ_{xx}) - физические компоненты тензора напряжений, ρ_f, C_{pf} - плотность и теплоемкость жидкости; T - температура жидкости, V_z - осевая составляющая вектора скорости.

В качестве граничных условий рассмотрены граничные условия

(а) или условия прилипания жидкости,

(б) или условия скольжения жидкости на стенках канала в виде линейного закона Навье

$$V_{zw}=k\sigma_{rzw}\ \text{(в круглой трубе)},\tag{2а}$$

$$V_{zw}=k\sigma_{xzw}\ \text{(в плоском канале)}\tag{2б}$$

и тепловые граничные условия

$$T\left(r,0\right)=T_0,\ \partial T\left(0,z\right)/\partial r=0,\ T\left(R,z\right)=T_w\ \text{(в круглой трубе)},\tag{3а}$$

$$T\left(x,0\right)=T_0,\ \partial T\left(0,z\right)/\partial x=0,\ T\left(h,z\right)=T_w\ \text{(в плоском канале)}.\tag{3б}$$

где T_0, T_w - температура жидкости на входе в трубу и на стенках соответственно.

Примем, что жидкость прилипает на стенке трубы. Из (1.1а, 1.1б) следует, что

$$\sigma_{rz}=-\left|C_0/2\right|r,\tag{4}$$

где $\dfrac{\partial P}{\partial z} = C_0 = const = -\left|C_0\right|$.

Реологическое уравнение состояния для многомодальной вязкоупругой жидкости может быть записано в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_s, \quad \boldsymbol{\sigma}_N = 2\eta_N \boldsymbol{D},$$

где n – число мод; $\boldsymbol{\sigma}_N$ – ньютоновская составляющая тензора напряжений; η_N – вязкость ньютоновской составляющей тензора напряжений; $\boldsymbol{\sigma}_k$ – упругая составляющая тензора напряжений для k-той моды.

Для определения упругих составляющих каждой моды использовались три реологические модели вязкоупругого поведения:

- модель Гиезекуса [*Giesekus H.// J. Non-Newton. Fluid Mech. 1982. № 11. № 1-2. P. 69–109*]:

$$\boldsymbol{\sigma}_k + \lambda_k \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \frac{\alpha_k \lambda_k}{\eta_k} \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_k = 2\eta_k \boldsymbol{D}, \quad \left(k = 1, \dots, n\right); \tag{5}$$

- экспоненциальная форма модели Фан-Тьен-Таннера [*Phan-Thien N., Tanner R. I. // J. Non-Newt. Fluid Mech. 1977 V. 2. №. 4. P. 353–365*]:

$$\lambda_k \left(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \xi_k \left(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\sigma}_k + \boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{D} \right) \right) + g_k \boldsymbol{\sigma}_k = 2\eta_k \boldsymbol{D}, \ g_k = \exp\left[\frac{\varepsilon_k \lambda_k}{\eta_k} tr\left(\boldsymbol{\sigma}_k\right) \right], \left(k = 1, \dots, n \right), \tag{6}$$

- модель Single equation eXtended Pom-Pom (XPP) [*Verbeeten W M H, Peters G W M, Baaijens F P T* J. Non-Newtonian Fluid Mech *2001* ***45*** *823-843*]

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}_k\right) = \frac{2}{\varepsilon_k} e^{\frac{2(\Lambda_k - 1)}{q}} \left(1 - \frac{1}{\Lambda_k} \right) + \frac{1}{\Lambda_k^2} \left(1 - \frac{\alpha_k \lambda_k^2 tr\left(\boldsymbol{\sigma}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}_k\right)}{3\eta_k^2} \right), \tag{7}$$

$$\Lambda_k = \sqrt{1 + \frac{\lambda_k tr \boldsymbol{\sigma}_k}{3\eta_k}}, \ \varepsilon_k = \frac{\lambda_{s0k}}{\lambda_k}.$$

Здесь $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ верхняя конвективная производная тензора, определяемая с помощью соотношения

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{V}^T - \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{V} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \boldsymbol{V}^T - \nabla \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

$k = 1, \dots, n$; k порядковый номер моды, n общее количество мод; $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений**;** $\boldsymbol{\sigma}_N$ ньютоновская составляющая тензора напряжений; $\boldsymbol{D}$ - тензор скоростей деформаций; $\boldsymbol{\sigma}_N, \boldsymbol{\sigma}_{Vj}$ - вязкая и упругие составляющие k-ой моды девиатора тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$; μ_N, μ_{Vj} - вязкости; λ_j - времена релаксации; α_j, λ_{s0k} - реологические параметры; $\vec{\boldsymbol{V}}$ - вектор скорости.

Исходная система уравнений переписана в безразмерном виде. Для использования метода Фурье зависимости безразмерной координаты и осевой составляющей скорости от параметра представлены в виде рядов по этому параметру. Приняты допущения, позволяющие распределение гидродинамических полей считать не зависящими от осевой координаты, что в свою очередь позволило решать систему уравнений переноса количества движения и неразрывности отдельно от уравнения переноса энергии.

Метод решения

Использовано параметрическое представление зависимости градиента скорости сдвига, нормальных напряжений, температурных полей и полей тепловых потоков от геометрической переменной для неизотермических течений вязкоупругих жидкостей в круглой трубе и плоском канале с мультимодальными реологическими уравнениями состояния. В отличие от широко распространенных численных методов для получения профилей скорости и температуры, нормальных напряжений при течении мультимодальных вязкоупругих сред производится интегрирование параметрических зависимостей с помощью перехода в интегралах от независимой переменной к интегрированию по параметру, что дает возможность получать решения как в аналитическом виде, так и с помощью разложения в ряды. Записанное в параметрическом виде уравнение переноса энергии решено с использованием метода разделения переменных (метод Фурье).

Апробация

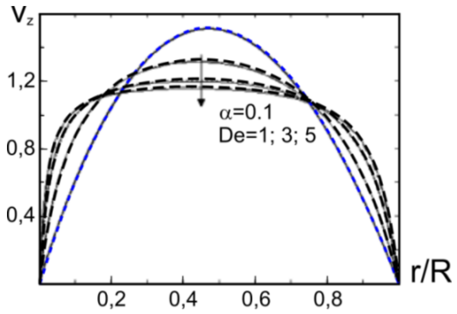


Рис. 1. Безразмерный профиль скорости жидкости Гиезекуса в коаксиальном канале: разработанный метод, - ньютоновская жидкость *[Mehdi Mostafaiyan, Fariborz Rashidi. //J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 (2010) p. 1550–1553]*

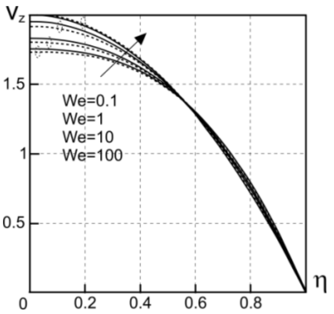


Рис. 2. Течение жидкости Фан-Тьен-Таннера в круглой трубе: *пунктирная линия* – разработанный метод, *сплошная линия* – литературные данные [Cruz D.O.A., Pinho F.T. (2007) // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 141, pp. 85–98]

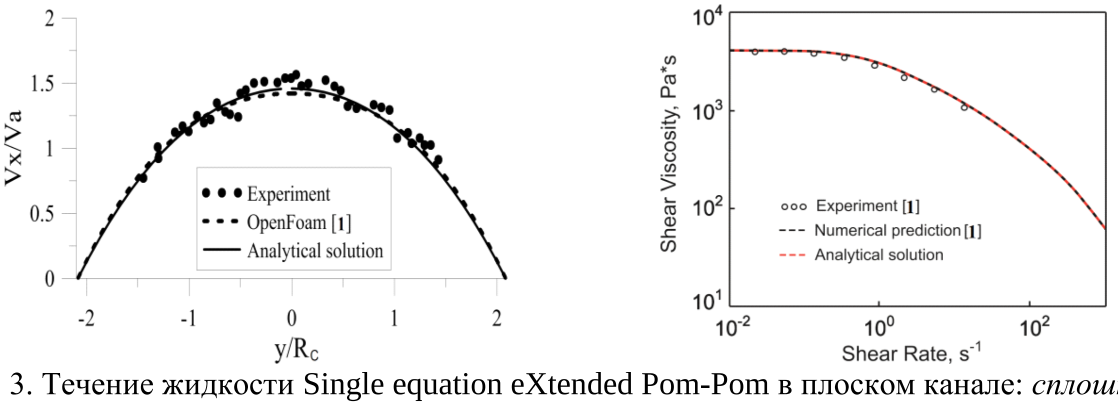
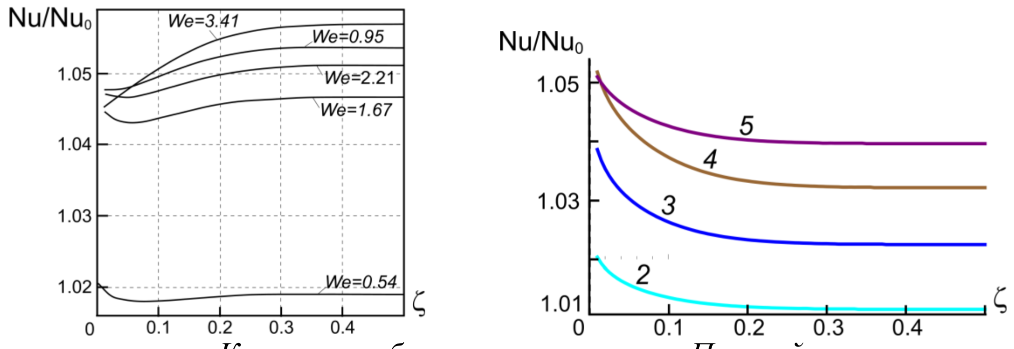


Рис. 3. Течение жидкости Single equation eXtended Pom-Pom в плоском канале: *сплошная линия* – разработанный метод; *точки* – экспериментальные данные [*Verbeeten W M H, Peters G W M, Baaijens F P T // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 108 (2002) 301–326*]

Результаты

Увеличение числа Вайсенберга приводит к росту интенсивности теплообмена по отношению к течению ньютоновской жидкости. Для обеих геометрий труб (круглая труба и плоский канал) профили скорости для вязкоупругой жидкости более наполненные по сравнению с ньютоновской жидкостью



Круглая труба *Плоский канал*

Рис. 4. Распределение отношения Nu/Nu_0 по длине трубы для различных значений числа Вайсенберга: ньютоновская жидкость - Nu_0, 2 - $We=0.71$, 3 - $We=1.24$; 4 - $We=2.14$; 5 - $We=10.26$

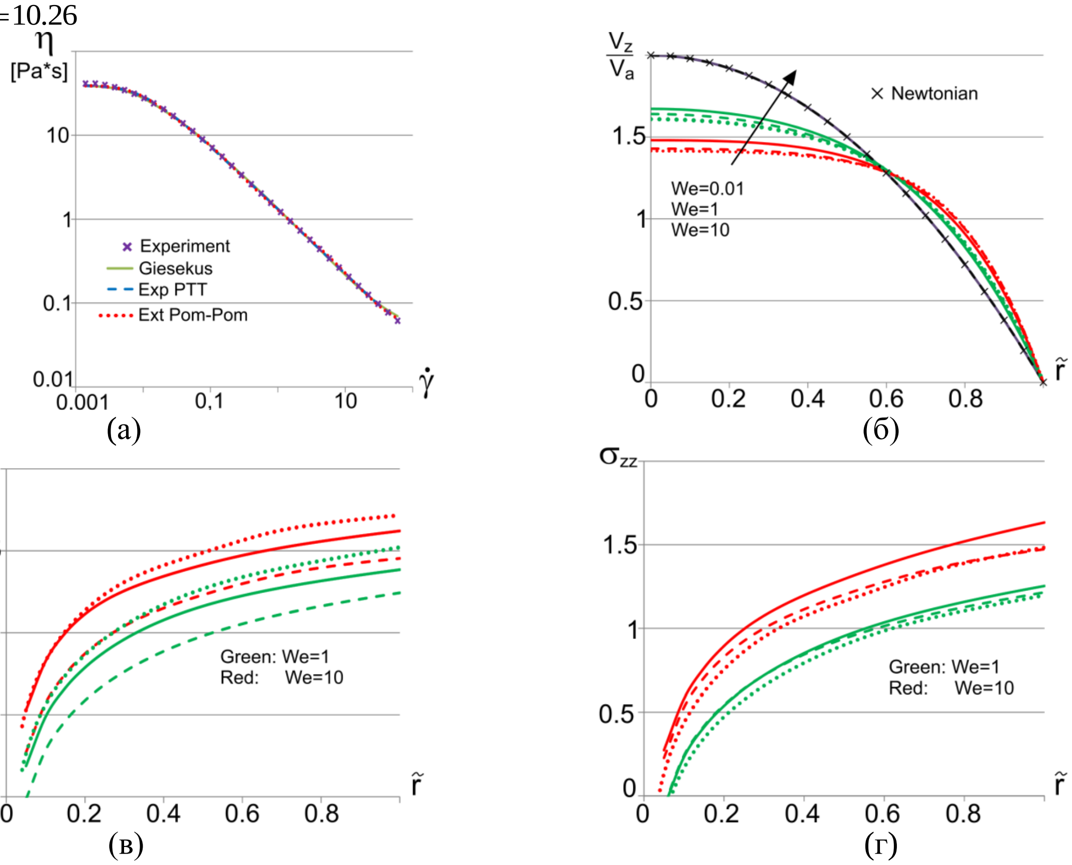


Рис. 5 Профили безразмерной осевой составляющей вектора скорости (а) и нормальных напряжений (б, в) при течении 0.25% водного раствора полиакриламида: *сплошная линия* – модель Гиезекуса; *пунктирная линия* – модель ФТТ, *точки* – модель Pom-Pom.

1. Разработаны математические модели неизотермических течений мультимодальных жидкостей Гиезекуса, Фан-Тьен-Таннера, Pom-Pom в круглых трубах (плоских каналах) и параметрические методы решений поставленных задач. Выполнен анализ полей скоростей, температур и напряжений рассматриваемых мультимодальных жидкостей.
2. Более подробно результаты изложены в опубликованных работах, индексируемых в РИНЦ и Scopus, а также в материалах концеренций.